Ciò che di solito si trascura nello studio dell'oscillatore "massa-molla"

Paolo Peranzoni*, **Giacomo Torzo**+
*Liceo Cornaro, Padova
+ICIS-CNR, INFM-PD, Dip. Fisica, Universisà di Padova

Riassunto
Si discutono alcuni aspetti spesso trascurati nello studio sperimentale del pendolo elastico (oscillatore verticale massa-molla), per mostrare come si possa utilizzare questo esperimento nella didattica, traendo vantaggio dalla analisi accurata dei dati sperimentali offerti da sistemi RTL per stimolare gli studenti ad una indagine più approfondita dei fenomeni osservati.

1. Introduzione

L'esperimento del pendolo elastico è tra i più frequentemente utilizzati sia nel laboratorio didattico tradizionale che nel laboratorio che si avvale di acquisizione dati in tempo reale (RTL). Tuttavia raramente l'insegnante si addentra nella analisi di questo sistema per mettere in luce tutti gli aspetti che possono essere sfruttati nell'insegnamento della dinamica.
In questo lavoro ci proponiamo offrire alcune considerazioni che riteniamo possano risultare utili nella didattica della fisica a livello di scuola secondaria e probabilmente anche ai primi livelli dell'insegnamento universitario.
Consideriamo un sistema costituito da una molla, di massa m e costante elastica k, sospesa in alto ad un supporto fisso e con una massa M appesa alla estremità inferiore della molla.
Mettiamo in oscillazione verticale il sistema e lo studiamo sperimentalmente con un apparato RTL che utilizza un sensore per registrare la posizione della massa in funzione del tempo (sonar) e un sensore per misurare la forza trasmessa dall'estremo superiore della molla (dinamometro).
L'analisi usuale[1] evidenzia i grafici di posizione, velocità, accelerazione e forza verso il tempo, per mostrare l'andamento sinusoidale e ricavare il periodo (che si mostra essere indipendente dall'ampiezza) e per analizzare le relazioni di fase tra le quattro grandezze, e i grafici di accelerazione in funzione dello spostamento (dalla cui pendenza si ricava la pulsazione), di forza in funzione dello spostamento (da cui si ricava la costante elastica) e di forza in funzione dell'accelerazione (da cui si ricava la massa inerziale). Spesso si invitano gli studenti a costruire con i dati acquisiti valori per grandezze derivate (energia potenziale e cinetica) per mostrare la conservazione dell'energia e la trasformazione durante il moto di energia potenziale in cinetica e viceversa.
Tuttavia una analisi accurata dei dati pone alcuni problemi non banali:
- come tener conto della massa m della molla?
- Il valore misurato della massa inerziale (dedotto dall'equazione F=Ma) deve coincidere con il valore della massa gravitazionale (ottenuto attraverso il peso misurato Mg)?
- come valutare correttamente l'energia totale del sistema? (è necessario tener conto della energia potenziale nel campo gravitazionale o l'analisi energetica può esser fatta anche diversamente?)
- perché l'energia totale calcolata oscilla, sembrando violare la legge di conservazione?
- se c'è smorzamento, in che modo si manifesta? (che effetto ha sul periodo, e sull'andamento dell'energia totale?)

[1] Si veda ad esempio : B. Pecori, G. Torzo, G. Pezzi, O. Foà, A. Rambelli, M. Rafanelli, M.R. Rizzo, "L'utilisation d'acquisitions avec des installations portables dans l'enseignement de la physique" *Bulletin de Physicien* 12 (2001); G.Torzo, G. Delfitto and B.Pecori: "Harmonic and anharmonic oscillations studied with CBL and Graphic Calculators", Workshop for the XXX *International Physics Olympia*d, Padova 19-23 (1999)

- che forza misura il sensore di forza durante l'oscillazione? (che relazione ha la forza misurata con quella realmente applicata alla massa oscillante?)
- che effetto hanno eventuali oscillazioni torsionali?

Queste sono alcune delle questioni emerse, ove un ruolo centrale riveste la massa della molla, che non può in genere essere trascurata[2].

2. Esempio di risultati sperimentali

In questo lavoro riportiamo, per fissare le idee sul tema, un esempio di dati sperimentali ottenuto con un sistema RTL portatile (calcolatrice grafica TI89, interfaccia CBL2, sonar Vernier, dinamometro Vernier), e poi discutiamo il ruolo della massa della molla, come varia la forza rilevata dal dinamometro e quella sentita dalla massa oscillante, l'effetto del metodo numerico per ottenere velocità e accelerazione dai dati di spostamento, modi diversi di calcolare l'energia totale, l'effetto di errori (offset) nella misura della posizione di equilibrio, nella taratura e nell'azzeramento del sensore di forza, effetto dello smorzamento, effetto della massa idrodinamica, e infine possibile errore sulla stima della massa introdotto dal trascurare la spinta idrostatica nel pesare la massa oscillante.

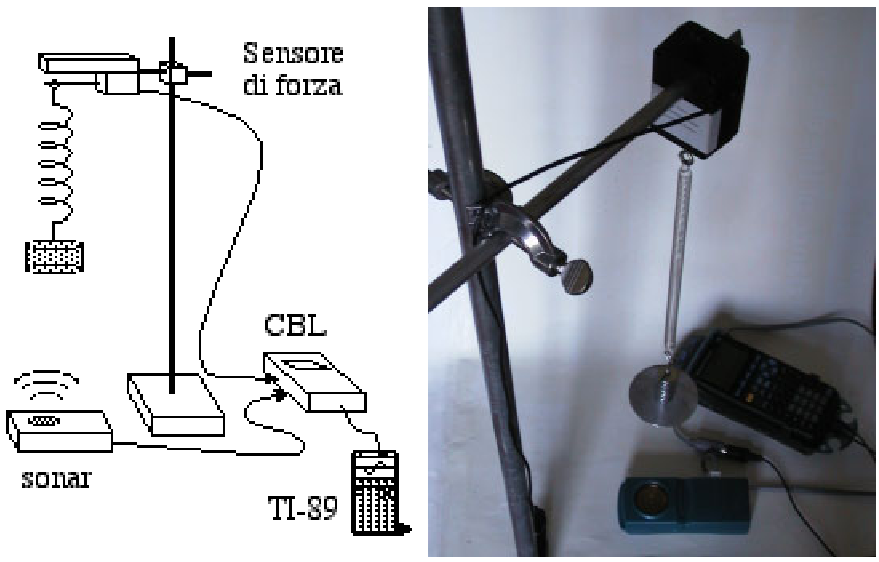


Figura 1: Schema di un apparato sperimentale RTL per lo studio di un oscillatore massa-molla.

[2] Su questo tema, nel dicembre 200 si è sviluppato un ricco dibattito nella mail_list dell'AIF (Sagredo), che ha dimostrato come esso appassioni gli insegnanti di fisica italiani.

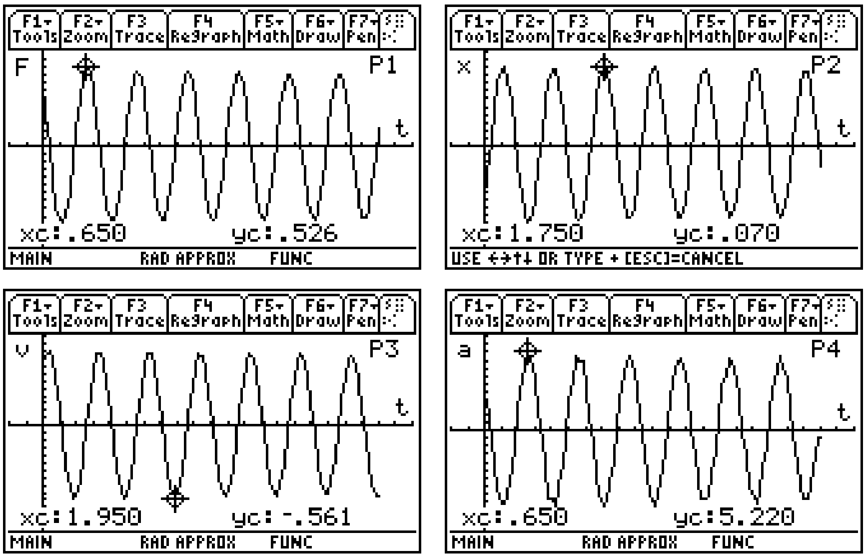


Figura 2: Andamento della forza, della posizione, della velocità e dell'accelerazione in funzione del tempo.

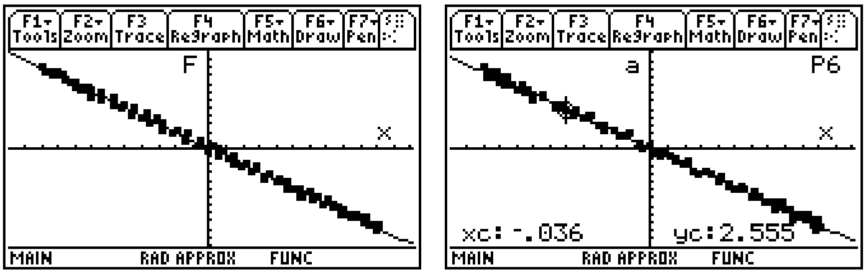


Figura 3: pendenza= costante elastica *k* pendenza = -quadrato della pulsazione $-\omega^2$

3. La massa della molla

Cominciamo con l'affrontare la prima questione: come tener conto della massa *m* della molla?
Il problema è discusso, ad esempio, nell'articolo di Lawrence Ruby *Equivalent Mass of a Coil Spring*[3]; l'autore fornisce due metodi di calcolo per arrivare al risultato: che la *massa equivalente* dell'oscillatore (ossia quella da inserire nelle formule che legano massa, costante elastica e periodo) è pari a $M+m/3$.
Tale risultato si riferisce però alla massa inerziale equivalente quella utilizzata nel *calcolo dell'energia cinetica* (ossia quella che determina il periodo del moto), non alla massa gravitazionale equivalente utilizzata nel *calcolo dell'energia potenziale*: quest'ultima è valutabile invece come $M+m/2$ (vedi Appendice 1).
In entrambi i casi, inoltre, si assume l'ipotesi dell'*allungamento uniforme* della molla (e conseguentemente dell'assenza di onde o impulsi che si propaghino lungo essa); questa ipotesi è realistica solo per molle sufficientemente "dure[4]. L'autore citato, per molle "morbide", propone un modello che quantifica la massa aggiuntiva come compresa fra $m/3$ e $m/2$.
Nei concreti problemi sperimentali dei sistemi massa-molla si utilizzano in genere molle sufficientemente dure, e per questa ragione anche qui assumeremo di poter considerare l'allungamento sostanzialmente uniforme; tuttavia un allungamento non uniforme va almeno analizzato con un modello matematico, perché, anche se gli effetti sui dati sperimentali nei casi

[3] Lawrence Ruby, *The Physics Teacher*, **38**, 140 (2000).
[4] Tale ipotesi non è vera ad esempio con le molle tipo *slinky*, che, appese verticalmente senza carico, mostrano con evidenza una separazione tra le spire adiacenti che cresce dal basso verso l'alto.

comuni non sono apprezzabili, l'applicazione della legge di Newton al sistema può indurre lo studente a conclusioni paradossali se egli assume l'ipotesi di un allungamento rigorosamente uniforme insieme all'ipotesi di molla dotata di massa piccola ma non nulla.

4. Il dinamometro: che forza misura?

La costante elastica della molla viene comunemente calcolata, in esperimenti condotti con sistemi RTL, come rapporto tra la *forza misurata dal dinamometro* cui è appesa la molla e lo spostamento corrispondente della massa appesa alla molla (misurato da un sensore di distanza).
Ma la forza così misurata non è quella realmente applicata alla massa oscillante.
Il dinamometro misura la forza complessiva $F=(M+m)g$ esercitata dal sistema massa-molla all'estremità superiore della molla, mentre all'altra estremità della molla agisce solo la forza $F=Mg$.
In altri termini: se noi disponessimo due dinamometri uno *sopra* alla molla e uno (di massa nulla) *sotto*, avremmo misure diverse per i due strumenti. Ma allora quale delle due misure va presa in considerazione ai fini del calcolo della costante elastica k ?
A questa domanda si potrebbe rispondere sbrigativamente che basta misurare due forze F diverse applicate all'estremo inferiore della molla e i relativi allungamenti ΔL, e poi ricavare k come pendenza del grafico $F(\Delta L)$, ma ci è sembrato utile invece offrire una analisi più dettagliata del problema per dare una giustificazione più analitica a tale risposta empirica, che è sostanzialmente corretta. Anche perché la situazione, relativamente semplice in condizioni statiche, diventa meno intuitivamente analizzabile in condizioni dinamiche.
Il dinamometro superiore misura la forza $F=(M+m)g$, mentre quello inferiore dovrebbe misurare $F=Mg$; di quanto si allunga la molla in queste condizioni?
La nostra molla ha complessivamente N spire; consideriamo un elemento infinitesimo di molla contenente dn spire, posto in corrispondenza dell'n-esima spira partendo dal basso. Pensiamo cioè la molla come composta di N/dn elementi in serie di costante elastica k'. La costante elastica di ciascun elemento sarà (tenuto conto delle relazioni per molle in serie):

$$k' = k(N/dn)$$

La massa m' della molla *sottostante* tale elemento sarà invece la somma di n masse di una spira (m/N):

$$m' = n(m/N)$$

Pertanto, la forza che tira in basso l'elemento di molla è:

$$F' = g\left(M + mn/N\right)$$

Il suo allungamento[5] sarà quindi:

$$d(\Delta l) = \frac{F'}{k'} = \frac{g(M + mn/N)}{kN/dn} = g\frac{MN + mn}{kN^2}dn$$

Integrando su tutta la molla si ottiene:

$$\Delta l = \int_0^N d(\Delta l) = \frac{g}{kN^2}\left[MN\int_0^N dn + m\int_0^N ndn\right] = \frac{g}{kN^2}\left[MN^2 + m\frac{N^2}{2}\right] = \frac{g\left(M + m/2\right)}{k}$$

L'allungamento totale della molla corrisponde dunque ad una forza di trazione pari a $g(M+m/2)$, media aritmetica tra le forze misurate dai due dinamometri.
Ove non si possa trascurare m rispetto a M si dedurrebbe quindi che la costante elastica calcolata utilizzando una sola coppia di valori misurati (la forza peso applicata al dinamometro dalle due masse, e l'allungamento della molla Δl) come $k=(M+m)g/\Delta l$ sarebbe errata per eccesso della quantità $\Delta k/k=m/(2M+m)$.

[5] Si vede qui che l'allungamento non può essere uniforme: esso cresce (a partire dal basso) linermente al crescere del numero n di spire prese in considerazione. L'allungamento *rigorosamente* uniforme in presenza di campo gravitazionale è incompatibile con l'ipotesi che la molla abbia massa non trascurabile e costante elastica finita.

Tale errore trarrebbe origine dal fatto che il dinamometro misura la forza totale, mentre ciascun elemento della molla subisce una trazione che cresce (dal basso verso l'alto) per effetto del peso dei singoli elementi di molla (con allungamento conseguentemente non uniforme).
Ma basta pensare al caso limite M=0, (cui corrisponde l'allungamento Δl=gm/2k della molla rispetto alla lunghezza della molla a riposo in orizzontale, per effetto del suo peso) per capire che tale errore viene cancellato se l'allungamento Δl (dovuto alla applicazione della sola forza Mg) viene misurato rispetto alla lunghezza della molla a riposo in posizione verticale.
In altri termini, come già si è detto, per calcolare la costante elastica è conveniente misurarne *le variazioni di lunghezza* per effetto della *variazione*della forza applicata.

5. L'energia potenziale

Per quanto riguarda il calcolo dell'energia totale del sistema, si possono fare alcune osservazioni. Le tre forme di energia coinvolte (cinetica, potenziale gravitazionale e potenziale elastica) possono essere ridotte formalmente a due sole (eliminando dal gioco la gravitazionale) purché si sostituisca la lunghezza *a riposo* della molla con quella *all'equilibrio*, tenendo conto del fatto che l'energia potenziale è definita a meno di una costante additiva arbitraria.
In questo modo l'oscillatore massa-molla *verticale* diventa equivalente a quello dell'oscillatore massa-molla *orizzontale*, (meno facile da realizzare sperimentalmente a causa degli inevitabili attriti).
Una dimostrazione può essere la seguente:
L'energia potenziale $U(x)$ di un corpo in un campo di forze $F(x)$ è una funzione della sola posizione x del corpo, e si calcola come opposto del lavoro $L(x, x_o)$ compiuto dalle forze in uno spostamento da una posizione di riferimento x_o ad un'altra generica x.
$U(x)$ è quindi definita a meno di una costante additiva, che dipende dalla scelta del riferimento. Possiamo quindi scrivere $U(x)= -L(x, x_o)$.
Nel caso dell'oscillatore massa-molla verticale, trascurando per il momento la massa della molla, se scegliamo un sistema di riferimento verticale x diretto verso il basso, con *origine qualsiasi*, la forza *elastica* $F_e=-k(l-l_o)$ (ove l è la lunghezza della molla per una posizione generica della massa e l_o la sua lunghezza a riposo), assume l'espressione $F_e=-k(x-x_0)$, ove x_0 è la coordinata che individua l'estremo inferiore della molla scarica. Nel medesimo sistema di riferimento la forza peso assume la forma $F_p=Mg$. La forza risultante è $F= Mg +k\,x_0 -kx$.
Il lavoro compiuto dalla forza risultante, a *partire dalla posizione in cui la molla è scarica* ($x=x_0$) è:

$$L(x_1,x_0) = \int_{xo}^{x_1} F(x)\,dx = \int_{xo}^{x_1} (Mg + kx_0 - kx)\,dx = \left(Mg + kx_0\right)\left(x_1 - x_0\right) - (k/2)\left(x_1^2 - x_0^2\right)$$

e l'energia potenziale riferita alla posizione in cui la molla è scarica assume l'espressione

$$U(x) = -L(x,x_0) = -Mg(x - x_0) + (k/2)(x - x_0)^2$$

Se invece scegliamo come origine dell'asse x *proprio la posizione del sistema all'equilibrio*, la forza risultante deve essere nulla per x=0, ovvero $Mg = -k\,x_0$, e l'espressione della forza risultante per una posizione generica si semplifica in $F=-kx$, ove *il contributo del campo gravitazionale non compare più.*

$$U(x) = -L(x,0) = +(k/2)x^2$$

Questa relazione è identica a quella che si otterrebbe per la *sola energia potenziale elastica* per una molla con lo stesso valore di k e che fosse *a riposo con l'estremità inferiore nella posizione x_0*, esattamente *la stessa relazione che otterremmo per un sistema massa-molla oscillante senza attrito su un piano orizzontale*, ove la forza di gravità è perfettamente bilanciata dalla reazione vincolare e quindi non compie lavoro.
Una trattazione alternativa è la seguente:

L'energia potenziale totale del sistema oscillante è la somma dell'energia potenziale elastica della molla con quella gravitazionale della massa:

$$U = U_e + U_g = (1/2)k(\Delta x)^2 - Mg\Delta x$$

Detta l_0 la lunghezza della molla scarica e l_1 la sua lunghezza *di equilibrio* quando viene appesa la massa M, ed l la sua lunghezza generica, risulta $k(l_1 - l_0) = Mg$. Si ha poi, ovviamente, $\Delta x = l - l_0$; definiamo analogamente $\Delta x' = l - l_1$ lo spostamento a partire dalla posizione di equilibrio. Si ha $\Delta x' = \Delta x - (l_1 - l_0) = \Delta x - Mg/k$ e, inversamente, $\Delta x = \Delta x' + Mg/k$; l'energia potenziale totale diventa allora:

$$U = \frac{1}{2}k(\Delta x' + Mg/k)^2 - Mg(\Delta x' + Mg/k) = (1/2)k\Delta x'^2 - (1/2)M^2 g^2/k$$

che, a meno della costante additiva $\left(M^2 g^2/2k\right)$, coincide con la sola energia elastica calcolata a partire dalla posizione di equilibrio (anziché di molla scarica).
Se consideriamo anche la massa della molla, avremo (vedi Appendice 1):

$$U = U_e + U_g = (1/2)k(\Delta x)^2 - (M + m/2)g\Delta x$$

È chiaro che può essere ripetuto il ragionamento precedente, sostituendo $M' = M + m/2$ ad M: l'unico cambiamento è il valore (inessenziale) della costante additiva.
Il problema può essere analizzato anche graficamente, osservando che in un grafico della forza $F(x)$ verso lo spostamento x l'area sottesa da $F(x)$ è il lavoro compiuto dalla forza (nell'ipotesi che forza e spostamento abbiano la stessa direzione o che si consideri la componente della forza nella direzione dello spostamento). Aree al di sopra dell'asse x hanno segno positivo, aree al di sotto hanno segno negativo.

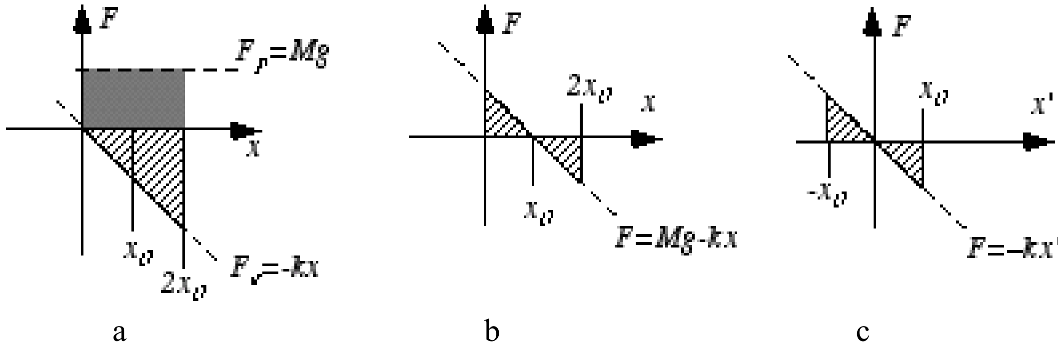


Figura 4: rappresentazione grafica del lavoro in funzione dello spostamento

Sia in (a) che in (b) il sistema di riferimento per lo *spostamento x* ha origine nella posizione che la massa ha con la molla *scarica*.
Nella figura (a) si considerano *separatamente* il lavoro compiuto dalla *forza peso* F_p (area grigia) e quello compiuto dalla *forza elastica* F_e (area tratteggiata). Nella figura (b) si considera il lavoro compiuto dalla *forza risultante* $F=Mg-kx$.
Nella figura (c) *si assume come origine la posizione di equilibrio* della massa appesa, e l'area tratteggiata rappresenta il lavoro compiuto dalla *forza risultante*: si vede subito che essa coincide con quella ottenuta nel precedente sistema di riferimento.
Questa analisi consente di usare una procedura assai semplice per calcolare l'energia potenziale quando si disponga di *valori sincroni di forza applicata F_i alla massa e di spostamento x_i dalla posizione di equilibrio*. In questo caso non serve conoscere la costante elastica k, basta calcolare i prodotti $-F_i x_i/2 = k x_i^2/2$, che misurano direttamente, punto per punto l'energia potenziale.

6. L'energia totale: oscillazioni nel grafico in funzione del tempo

Il calcolo dell'energia totale, a partire dai valori misurati di *posizione*, *velocità* e di *forza* in funzione del tempo, richiede anche la conoscenza della *massa inerziale* in movimento.

E' evidente che l'introduzione di un valore non corretto per la lunghezza della molla scarica (o, equivalentemente della posizione della massa all'equilibrio), ovvero per la massa inerziale (in particolare la correzione per la massa della molla, ma anche eventuali effetti dovuti alla massa idrodinamica o alla spinta idrostatica) provocano la comparsa di un termine periodico nell'energia totale, che dovrebbe invece essere costante.
Nel caso si calcoli l'energia potenziale usando i valori misurati di forza e spostamento $-F_i x_i/2$ (invece che i valori di spostamento e il valore calcolato della costante elastica $kx_i^2/2$) anche una imprecisa taratura o un impreciso azzeramento all'equilibrio del sensore di forza possono contribuire a crescere il termine oscillante (a frequenza doppia rispetto alla frequenza propria del pendolo elastico), come spiegato più in dettaglio nell'Appendice 2.
C'è infine anche un altro elemento da tenere in considerazione: il modo in cui viene calcolata la velocità, a partire dai dati di posizione. I vari software di acquisizione dati calcolano in genere la velocità del moto dividendo lo spostamento per l'intervallo di tempo; per ragioni di simmetria lo spostamento viene calcolato dall'istante (misurazione) *precedente* a quello *successivo* rispetto all'attuale (o da due prima a due dopo, e così via). Tale metodo provoca un certo "ammorbidimento" (*smoothing*) dei dati sperimentali, che ne diminuisce la "rumorosità" ma rischia anche di introdurre qualche errore sistematico; nell'Appendice 2 si dimostra che, per fenomeni di tipo sinusoidale, il metodo suddetto porta ad una *sottostima* della velocità e quindi dell'energia cinetica.
Ma torniamo al problema della determinazione accurata della massa inerziale M', che compare nel termine cinetico dell'energia totale come $(1/2)M'v^2$. Si è già detto che è importante tener conto della massa della molla ($M'=M+m/3$), ma questo non basta: se utilizziamo per M il valore ottenuto da una pesata con una comune bilancia commettiamo ancora un errore in difetto. La bilancia infatti ci fornisce il valore della *forza peso* (in unità di massa), ma tale strumento non può determinare quale sia il volume del corpo pesato e di conseguenza non può effettuare la correzione dovuta alla *spinta idrostatica dell'aria*. Per fare tale correzione occorre misurare il volume V della massa M e poi aggiungere al valore fornito dalla bilanìcia il termine correttivo ρV, portando il valore della massa inerziale a $M'= M+m/3+\rho V$.
Ma anche questo, ad essere pignoli, non basta ancora: si deve tener conto anche della *massa idrodinamica*, cioè l'aumento della massa inerziale di un oggetto in moto in un fluido, dovuto al fatto che esso, per muoversi deve "spostare" del fluido, e quindi il fluido così accelerato fa sentire la propria inerzia.
Il calcolo di questo contributo non è agevole nella maggior parte dei casi: esso dipende in modo importante dalla forma della massa in moto, ma in compenso di tratta (come per la spinta idrostatica) di un termine che è praticamente sempre trascurabile eccetto che nei casi in cui la massa oscillante abbia una densità media molto bassa. Per dare una idea grossolana: nel caso di una massa M di forma sferica la massa idrodinamica è il 50% del volume dell'aria spostata (cioè della correzione imposta alla massa inerziale dall'effetto della spinta idrostatica), ma nel caso di una massa a forma di disco che si muova lungo l'asse è assai maggiore.
Solo un pendolo elastico che oscilli nel vuoto non è affetto dal contributo inerziale dovuto alla massa idrodinamica. E tale effetto si fa sentire (come l'errata determinazione di M ottenuta con una bilancia) non solo in inaspettate oscillazioni dell'energia totale calcolata, ma anche nel valore misurato della frequenza di oscillazione $\omega=\sqrt{k/M'}$, o equivalentemente nel periodo $T=2\pi/\omega$.

Posto che l'energia totale dell'oscillatore (come spiegato in Appendice 1) si possa esprimere semplicemente come somma dell'energia elastica e cinetica

$$E = \frac{1}{2} M' v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

imponendo la condizione che la derivata temporale dell'energia sia nulla, si ottiene l'equazione differenziale del moto:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0 = M' \, v \, a + k \, x \, v, \quad \text{ovvero} \qquad M' \, a = M' \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -k \, x$$

Risolvendo l'equazione si trova che il sistema si muove di moto armonico con pulsazione data da:

$$\omega^2 = \frac{k}{M'} = \frac{k}{M + m/3}$$

Tuttavia ogni pendolo elastico reale, dopo un numero più o meno elevato di oscillazioni, si ferma: ciò significa che l'oscillazione è smorzata e che l'energia non si conserva.

Se l'equazione del moto include un termine di smorzamento (ad esempio proporzionale alla velocità)

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

allora la soluzione è

$$x = Ae^{-\gamma t} \cos\left(\omega' t + \phi\right) \text{, con } \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{M} - \frac{b^2}{4M^2}}$$

ove $\gamma = b/2M$ è il coefficiente di smorzamento della ampiezza di oscillazione.
E' facile dimostrare che questo effetto è molto piccolo (e per questo spesso esso viene trascurato senza nemmeno stimarne il valore) anche nel caso di evidente smorzamento: per un oscillatore con periodo di circa 1 secondo in cui sia $\gamma=0.1$, (ovvero in cui l'ampiezza si riduca ad $1/e$ della ampiezza iniziale in 10 secondi, cioè in 10 periodi) la variazione relativa di frequenza è solo $\Delta\omega/\omega = 1 - \omega'/\omega$, pari a circa $(1/2)(\gamma/\omega)^2$ ovvero circa 0.01% !

8. Moti torsionali: il pendolo elastico di Wilberforce

In generale un generico pendolo elastico può essere "eccitato" sia a compiere oscillazioni verticali che oscillazioni torsionali. Tuttavia normalmente quando si lanciano oscillazioni verticali le conseguenti oscillazioni torsionali che inevitabilmente si sviluppano non riescono a catturare una parte importante dell'energia complessiva del sistema.
Solo nel caso in cui il rapporto β/I tra costante elastica torsionale della molla β e momento di inerzia I rispetto all'asse verticale sia uguale al rapporto k/M' si verifica un notevole accoppiamento risonante tra i due modi di oscillazione: si tratta in questo caso del particolare pendolo che prende il nome da Robert Wilberforce, che per primo ne mise in evidenza le interessanti proprietà[6].
In tal caso infatti l'energia immagazzinata nella oscillazione verticale viene gradualmente trasferita in oscillazione torsionale (fino a che il baricentro del sistema risulta praticamente fermo) e poi nuovamente trasferita in oscillazione verticale, offrendo ad uno spettatore lontano, che non percepisca le torsioni, l'impressione che l'energia scompaia e riappaia come per magia.

[6] R. L.Wilberforce, On the vibrations of a loaded spring, *Philos. Mag*. **38**, 386 (1894). Per una trattazione recente del sistema si veda anche R. Berg, T. Marshall, *Am.J. Phys*. **59**, 32 (1991), e E. Debowska, S.Jakubowitz, Z.Mazur, *Eur. J. Phys*, **20**, 89 (1999)

Responsabile dell'accoppiamento tra modi di oscillazione verticale e torsionale è la proprietà della molla elicoidale che, sottoposta a trazione tende a "svolgere" la spirale, e sottoposta a compressione tende a riavvolgerla.
Perché tale fenomeno si verifichi è tuttavia anche necessario che la molla sia attaccata rigidamente sia alla estremità superiore al punto fisso, sia alla estremità inferiore alla massa oscillante.

9. Conclusioni

Da quanto esposto in questo articolo appare evidente come un problema apparentemente semplice quale quello del pendolo elastico nasconda in realtà complicazioni a prima vista inaspettate.
Si potrebbe obiettare che il livello delle considerazioni svolte mal si presta ad una applicazione didattica, per lo meno nella scuola media superiore; ciò è vero solo in parte: se infatti vogliamo realizzare con gli studenti misure sul sistema massa molla utilizzando sistemi di acquisizione in tempo reale, e se vogliamo sviluppare anche l'analisi energetica, ci imbattiamo quasi sicuramente in difficoltà che non possiamo semplicemente liquidare come "errori di misura".
Quanto meno, dobbiamo cercare di capire da dove provengano questi errori e come possiamo valutarli e minimizzarli; sarebbe scorretto far passare un termine oscillante nell'energia totale come dovuto a "rumore" dell'apparecchiatura: gli studenti capirebbero che si tratta, caso mai, di un "suono"…
Una cosa che si può fare senza difficoltà è mostrare, attraverso un foglio elettronico (anche quello molto semplice di Data/MatrixEditor), l'influenza notevole che un errore nella determinazione della massa del sistema e della posizione di equilibrio hanno sull'andamento dell'energia totale, cercando poi (anche per tentativi) di minimizzarne gli effetti indesiderati.
Parimenti è possibile far riflettere gli studenti sui limiti e i potenziali pericoli di un calcolo numerico della velocità e dell'accelerazione, sia per l'amplificazione del rumore che questi metodi comportano sia per gli errori sistematici connessi, come mostrato nell'Appendice 3.
Ciò potrebbe costituire, per gli allievi, una motivazione ad utilizzare metodi di interpolazione non solo lineare.

Appendice 1: la massa inerziale della molla.

Supponiamo che la molla si allunghi in maniera quasi uniforme durante l'oscillazione; questa ipotesi è realistica se la molla è abbastanza *dura e leggera*, circostanza in genere verificata per le molle che si usano in laboratorio a questo scopo. Inoltre dovremo supporre che lungo la molla non si propaghino onde o impulsi; anche questa ipotesi sembra abbastanza realistica nelle condizioni sperimentali ordinarie, in cui $M>>m$ e quindi eventuali impulsi si smorzano in tempi brevi rispetto al periodo di oscillazione della massa M.
Calcoliamo innanzitutto l'energia cinetica della molla in movimento; ogni elemento di massa dm della molla si muove con velocità v_x proporzionale alla distanza x dall'estremo superiore: $v_x = v_M(x/L)$, essendo v_M la velocità della massa M sospesa ed L la lunghezza totale della molla (in un dato istante); si ha inoltre $dm = (m/L)dx$. Detta perciò K_m l'energia cinetica della molla, si avrà:

$$K_m = \frac{1}{2}\int_0^L v_x^2 dm = \frac{1}{2}\int_0^L v_M^2 \frac{x^2}{L^2}\frac{m}{L}dx = \frac{mv_M^2}{2L^3}\int_0^L x^2 dx = \frac{mv_M^2}{2L^3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L = \frac{mv_M^2}{2L^3}\frac{L^3}{3} = \frac{1}{2}\frac{m}{3}v_M^2$$

L'energia cinetica della molla è pertanto all'incirca quella di una massa $m/3$ che si muova con la stessa velocità della massa sospesa.
La sua energia potenziale gravitazionale U_m (scegliendo come livello zero il punto di sospensione della molla) è invece:

$$U_m = -\int_0^L xg\,dm = -\int_0^L xg\frac{m}{L}\,dx = -\frac{g\,m}{L}\int_0^L x dx = -\frac{g\,m}{L}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = -\frac{g\,m}{L}\frac{L^2}{2} = -m\,g\frac{L}{2}$$

ove L è ora la lunghezza generica della molla (anche non a riposo). Si poteva giungere alla stessa conclusione osservando che il baricentro della molla si trova circa a metà della sua lunghezza, se l'allungamento è circa uniforme. L'energia potenziale *gravitazionale* della molla è dunque pari a quella di una massa *m*/2 che si trovi nella stessa posizione della massa sospesa.
Da quanto detto finora risulta che non esiste un solo valore per la "massa equivalente" della molla, da sostituire nelle equazioni del moto; i valori ottenuti per l'energia cinetica e per quella potenziale, infatti, sono diversi. La correzione da apportare nel calcolo dell'energia totale è quella *dinamica* *m*/3, dato che il termine gravitazionale può essere fatto sparire dall'espressione dell'energia.
Per essere più precisi, è possibile scrivere l'espressione dell'energia totale del sistema come:

$$E = \frac{1}{2}\left(M + \frac{m}{3}\right)v^2 + \frac{1}{2}k\,x^2 - \left(M + \frac{m}{2}\right)g\,x$$

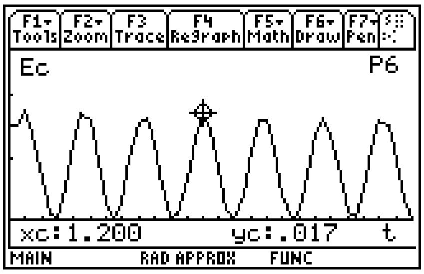
oppure, eliminando l'energia potenziale gravitazionale :

$$E = \frac{1}{2}M'\,v^2 + \frac{1}{2}k\,x^2$$

dove $M'=M+m/3$ e le posizioni x della massa oscillante sono *misurate a partire dalla posizione di equilibrio del sistema, anziché dalla posizione di riposo della molla*.

Appendice 2: oscillazioni nell'energia totale

Se i valori usati per la massa (nel calcolo dell'energia cinetica), o della costante elastica, o della forza e dello spostamento dalla posizione di equilibrio (nel calcolo dell'energia potenziale) sono affetti da errore, il grafico dell'energia totale in funzione del tempo mostra oscillazioni a frequenza doppia rispetto alla frequenza propria del pendolo elastico



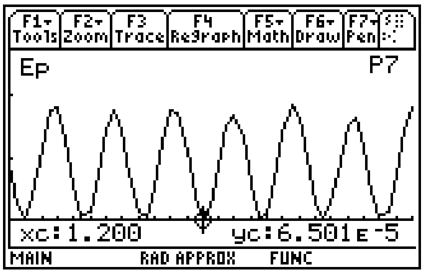


Figura 5: Ec=energia cinetica $(1/2)M'v^2$ Ep=energia potenziale $(1/2)kx^2$

Vediamo per esempio cosa comporta un errore di azzeramento della variabile x quando l'oscillatore è in equilibrio. Lo spostamento è descritto da una funzione di tipo sinusoidale $x = A\text{sen}(\omega t)$. Un errore nell'azzeramento corrisponde a cambiare tale funzione in $x = A\text{sen}(\omega t) + x_O$, dove x_O può essere sia positivo che negativo.
L'energia potenziale diventa $(1/2)k(Asen(\omega t) + x_0)^2$. L'energia cinetica $(1/2)k(A\omega\cos(\omega t))^2$ non risente dell'errore di zero, e l'energia totale si può scrivere, (assumendo che k e M non siano affetti da errore):

$$\frac{k}{2}(Asen\omega t + x_0)^2 + \frac{M}{2}(A\omega\cos\omega t)^2 = E_T\left[1 + 2\frac{x_0}{A}sen\omega t + \left(\frac{x_0}{A}\right)^2\right]$$

Quindi l'energia totale calcolata risulta modulata con pulsazione ω e ampiezza $(2x_O/A)E_T$.

Riportiamo nella figura 6 una simulazione che evidenzia l'effetto di x_0 sull'energia totale. Per disegnare le curve abbiamo utilizzato i valori di ω e di *k* ricavati dalle misure.

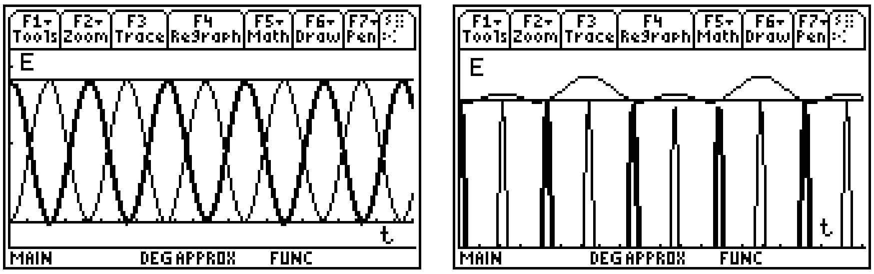


Figura 6: A sinistra: andamento in funzione del tempo delle energie potenziale, cinetica (in grassetto), totale (retta); a destra modulazione introdotta nell'energia totale da un errore x_0 = 0.5 mm (ampiezza A= 70 mm).

Perché comincino ad essere visibili oscillazioni dell'energia totale è sufficiente un errore nell'azzeramento del sonar pari a x_0 = 0.5 mm su un'ampiezza di oscillazione della massa pari a A= 7 cm.
Se anche *k* ed *M* sono affette da errore ciò introduce ulteriori oscillazioni sull'energia totale.
Un altro errore viene introdotto nel calcolo della velocità.
Quando si dispone di un insieme di dati della posizione in funzione del tempo, si può approssimare la velocità calcolando la derivata *numerica* dello spostamento come rappporto incrementale.
Ad un certo istante t_i la velocità è data da $(s_{i+1} - s_{i-1})/(t_{i+1} - t_{i-1})$; questo per ragioni di simmetria (altrimenti si dovrebbe calcolare la velocità in un istante *intermedio* fra due istanti sperimentali).
Si può calcolare il rapporto incrementale anche su intervalli più grandi, purché simmetrici: per esempio dal dato $i - 2$ al dato $i + 2$ e così via; l'effetto è quello di ridurre il "rumore" dei dati, ma è anche quello di peggiorare l'approssimazione della derivata numerica.
Questo si può vedere chiaramente dalla figura 7, in cui sono mostrati i grafici di una velocità cosinusoidale calcolata in modo esatto e approssimato (derivata numerica) a partire da uno spostamento sinusoidale.

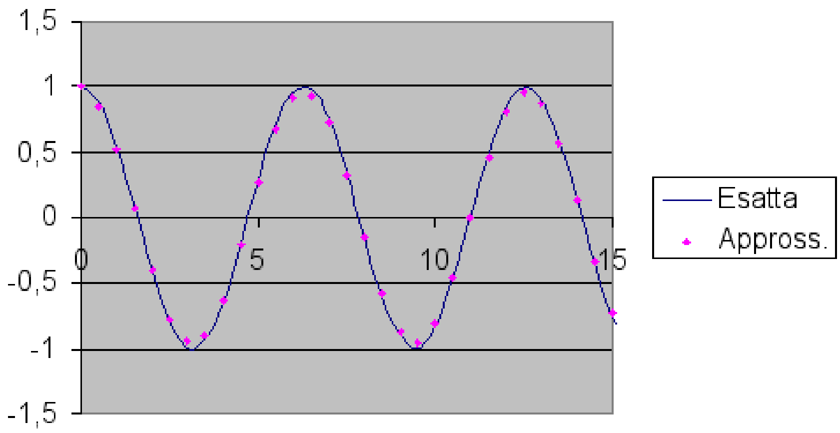


Figura 7: derivata esatta ed approssimata di uno spostamento cosinusoidale

In particolare si nota che la velocità calcolata col metodo numerico è sistematicamente minore (in modulo) di quella esatta.
Ciò può essere dimostrato anche con il calcolo trigonometrico; sia $x = \text{sen}\, t$ uno spostamento sinusoidale nel tempo. Come è noto, la velocità è $v = \cos\, t$; ma se calcoliamo la derivata come rapporto incrementale, avremo:

$$v = \frac{\text{sen}(\text{t} + \Delta\text{t}) - \text{sen}(t - \Delta t)}{2\Delta t} = \frac{\text{sen}\, t \cos\Delta t + \cos t\, \text{sen}\Delta t - \text{sen}\, t \cos\Delta t + \cos t\, \text{sen}\Delta t}{2\Delta t} = \frac{\text{sen}\, \Delta t}{\Delta t}\cos t$$

Il rapporto $\text{sen}\,\Delta t / \Delta t$ è sempre minore (in modulo) di 1 e tende a tale valore, come è noto, per $\Delta t \to 0$.
Dunque, per un moto armonico, il calcolo numerico della velocità *sottostima* questa grandezza (e di conseguenza l'energia cinetica); l'errore è tanto più grande quanto maggiore è l'intervallo temporale utilizzato.